

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF ELECTRONICS, INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS D-II

cic | **電子情報通信学会**
D-II | **論文誌** VOL. J78-D-II NO.6 JUNE
情報・システムⅡ—情報処理 1995

情報・システムソサイエティ

社団法人 **電子情報通信学会**

THE INFORMATION AND SYSTEMS SOCIETY

THE INSTITUTE OF ELECTRONICS, INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

アナログニューラルネットによる最適化問題の効率的な解法

正員 田中 敏雄[†] 正員 樋口 哲也[†]
 非会員 古谷 立美[†]

An Efficient Algorithm for Solving Optimization Problems by Analog Neural Network Models

Toshio TANAKA[†], Tetsuya HIGUCHI[†], *Members and*
 Tatsumi FURUYA[†], *Nonmember*

[†] 電子技術総合研究所, つくば市
 Electrotechnical Laboratory, Tsukuba-shi, 305 Japan

あらまし 組合せ最適化問題を効率良く解くために、エネルギー減少量が最大となるニューロンのみを選択的に状態変化させるアナログニューラルネットを提案する。本方法の性能を評価するために10都市、3種類の都市配置の巡回セールスマン問題に適用した結果、いずれの都市配置でも最適解が高い割合(71%以上)で得られた。

キーワード ホップフィールドネット, 最適化問題, 巡回セールスマン問題, アナログニューロン, 2値ニューロン

1. まえがき

我々は、ニューロンの出力が2値のホップフィールドネットに対して、ネットワークのエネルギーを効率的に減少させるために、ニューロンをランダムに選択するのではなく、エネルギー減少量が最大のニューロンのみを選択的に状態変化させる方法を提案した⁽¹⁾。

本論文では、この方法をアナログモデルに拡張した最適化問題解法アルゴリズムを提案する。アナログモデルに拡張することにより、2値モデルに比べ、解の質が改善できると考えられる。このことを検証するために、本方法を10都市、3種類の都市配置の巡回セールスマン問題(TSP)へ適用し、2値モデルとの性能比較を行う。そして、2値モデルからアナログモデルに拡張することにより、最適解へ収束する割合が大幅に改善されることを示す。

2. ホップフィールドネット

ホップフィールドネットは、相互結合型のネットワークで、ニューロン間の結合は対称結合になっている。また自分自身への結合はない。ニューロンの総数を N とすると、 i 番目のニューロンの入力 U_i は次式で与えられる。

$$U_i = \sum_{j \neq i}^N W_{ij} V_j + I_i \quad (1)$$

ニューロンの出力 V_i は次式で与えられる。

$$V_i = f(U_i) = \frac{1}{1 + \exp(-U_i/U_0)} \quad (2)$$

ここで、 W_{ij} はニューロン j からニューロン i への結合荷重、 I_i はニューロン i の入力バイアス、 U_0 は式(2)で定義されるシグモイド関数のこう配を決定するパラメータである。

ホップフィールドネットは、次式で与えられるエネルギー関数を極小化する性質がある⁽²⁾。

$$E(v) = -\frac{1}{2} \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N W_{ij} V_i V_j - \sum_i^N I_i V_i + \sum_i^N \int_0^{v_i} f^{-1}(v) dv \quad (3)$$

この性質を利用すると、最適化問題を解くことができる。すなわち、最初にエネルギーが最も低くなった状態が問題の解であるようにエネルギー関数を設計し、ホップフィールドネットを構成する。次に適当な初期状態を設定し、ニューロンの出力を式(2)に基づき非同期的に変化させると、式(3)のネットワークのエネルギーは必ず減少する。これを繰り返すことにより、やがてエネルギーが減少しなくなる平衡状態に達し、最適化問題を解くことができる。

3. 提案するアルゴリズムによる最適化問題の解法

本章では、提案するアルゴリズムによる最適化問題の解法について述べる。本アルゴリズムは、ホップフィールドネットを構成するところまでは従来のランダム選択法⁽³⁾と同一であるが以下の手順が異なる。本アルゴリズムは次の6ステップで構成される。

(ステップ1) 初期状態の設定。

ニューロンの出力はすべて1に設定する。

(ステップ2) ニューロンの選択。

出力が1のニューロンの中で、ニューロンの出力を式(2)に基づき変化させたときのエネルギー減少量が最大のニューロンを1個選択する。これは、出力が1のニューロンの中で式(1)で定義される入力の総和が最小のニューロンを選択することに相当する⁽¹⁾。なお、入力の総和が最小のニューロンが複数個存在する場合には、この中の1個をランダムに選択する。

(ステップ3) 状態遷移規則の適用。

状態遷移規則は二つ(A, B)あり、状態遷移規則Aを適用した後で、状態遷移規則Bを適用する。状態遷移

規則 A は、ステップ 2 で選択されたニューロンの出力を式(2)に従い決定する。状態遷移規則 B は、状態遷移規則 A で生じた矛盾を解消するものである。すなわち、ステップ 2 で選択されたニューロンの入力 $U_{i,\min}$ の総和を $U_{i,\min}$ とし、状態変化したニューロンの中で入力 $U_{i,\max}$ の総和が最大のニューロンの入力の総和を $U_{i,\max}$ とすると、 $U_{i,\max} > U_{i,\min}$ ならば、そのニューロンの出力を 1 にする。但し、 $U_{i,\max}$ のニューロンが複数個存在する場合には、この中の 1 個をランダムに選択する。

(ステップ 4) 終了条件の判定。

終了条件(例えば TSP では、各行、各列に 1 が 1 個以下⁽¹⁾)を満足したら停止する。そうでないならば、ステップ 2 へ戻る。

(ステップ 5) 出力の 2 値化。

ニューロンの出力が 1 ならば 1、そうでないならば 0 にする。

(ステップ 6) 解の判定。

解(例えば TSP では、各行、各列に 1 が 1 個)ならば終了。そうでないならば、修復アルゴリズムに入る(修復アルゴリズムについては 3.1 で述べる)。

次に、このアルゴリズムの収束性について述べる。このアルゴリズムは、状態遷移規則 B を除くとネットワークが収束する、すなわち、ステップ 4 の終了条件を満足するまでネットワークが動作することは明らかである。状態遷移規則 B の導入によりネットワークが収束する保証はないが、状態遷移規則 B では、矛盾したニューロンの出力を 1 個のみ 1 に再設定することにより、ネットワークがループする確率を減らしている。5. で述べる TSP の実験では、このアルゴリズムですべて収束することを確認している。

3.1 修復アルゴリズム

ステップ 6 で解が得られなかった場合、修復アルゴリズムに入る。修復アルゴリズムの基本的な考え方は、

制約条件(例えば TSP では、各行、各列に 1 が 1 個)を満足しているニューロンの状態はそのまま残し、制約条件を満足していないニューロンの状態を修復する。制約条件を満足していないニューロンの出力を 1 に再設定し、この状態を初期状態とし、ステップ 2 へ戻り、再度同一アルゴリズムを繰り返すことにより解を得る⁽¹⁾。

4. TSP の解法

本章では、組合せ最適化問題の中でも良い解を得るのが難しいとされている TSP を 3. で述べたアルゴリズムを用いて解く方法について述べる。

TSP は、一人のセールスマンが N 個の都市を一度ずつ訪問し、出発した都市に戻るような経路のうちで、最短の経路を求める問題である。TSP の解は都市数を N とすると、 $N \times N$ 個のニューロンを用いて、各都市を行に、列を巡回順序に対応させて、各行、各列に 1 が一つだけあるニューロンの状態により表す。TSP を解くためのエネルギー関数は、以下のようなエネルギー関数を用いている⁽³⁾。

$$E = \frac{\alpha}{2} \left(\sum_x \left(\sum_i V_{xi} - 1 \right)^2 + \sum_i \left(\sum_x V_{xi} - 1 \right)^2 \right) + \frac{\beta}{2} \sum_x \sum_{y \neq x} \sum_i \frac{d_{xy}}{d_{norm}} \frac{V_{xi}(V_{y,i+1} + V_{y,i-1})}{2} + \alpha \sum_x \sum_i V_{xi}(1 - V_{xi}) \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0) \quad (4)$$

x, y は都市、 i は訪問順、 d_{xy} は都市 x, y 間の距離、 α は制約項の係数、 β はコスト項の係数を表す。 d_{norm} は、すべての異なる都市間の距離データ $((N^2 - N)$ 個)の平均値である。

式(4)の TSP のエネルギー関数から結合荷重とバイアスを求め、ホップフィールドネットを構成すると、 x 行 i 列の入力の総和は次式で表される。

$$U_{xi} = -\alpha \left(\sum_{j \neq i} V_{xj} + \sum_{y \neq x} V_{yi} \right)$$

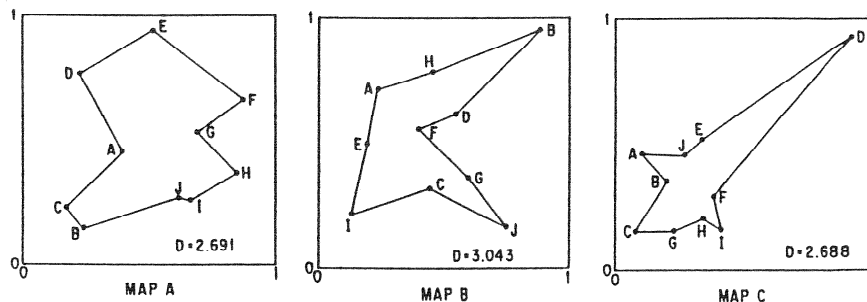


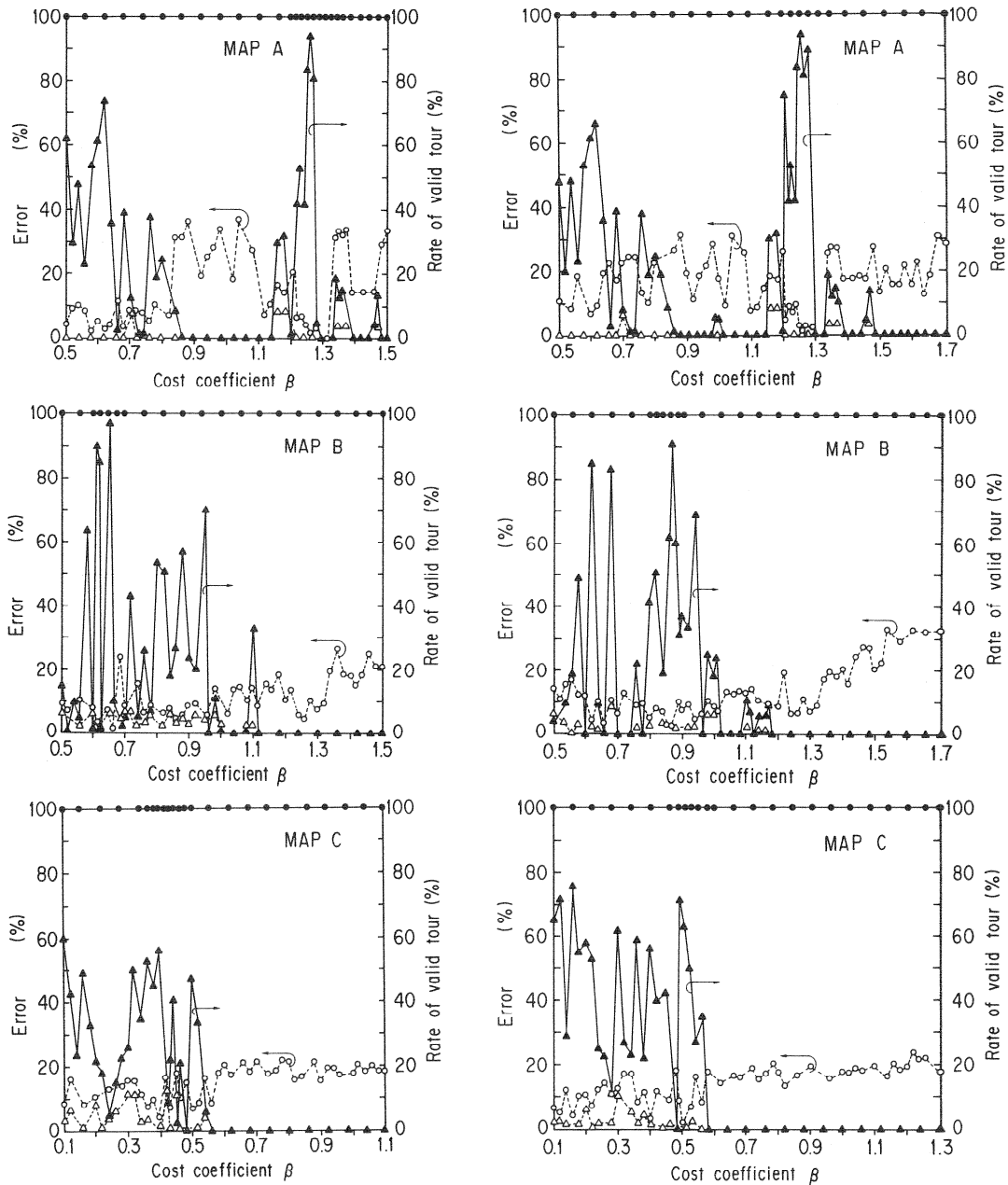
図 1 実験に使用した都市配置
Fig. 1 Maps of city allocations.

$$-\beta \sum_{y \neq x}^N \frac{d_{xy}}{d_{norm}} \frac{(V_{y,i+1} + V_{y,i-1})}{2} + \alpha \quad (5)$$

式(5)より、3.で述べた手順に従いニューラルネットを動作させると、TSPを解くことができる。

5. 実験結果

本章では、都市数10の三つの都市配置について、アナログモデルと2値モデルとの性能比較を行う。



(a) Analog neuron model

(b) Binary neuron model

- △ is the error without restoration.
- ▲ is the succes rate in getting tour without restoration.
- is the error with restoration.
- is the succes rate in getting tour with restoration.

図2 コスト係数に対するエラーと解が得られる割合の変化
Fig. 2 Cost-coefficient value vs. error and rate of valid tour.

5.1 実験条件

図1に、実験に使用した3種類の都市配置を示す。マップAは、ベンチマークとして多くの研究者が採用している都市配置である。マップBとCは、マップAよりも最適解が得にくい都市配置である。

5.2 結果

本節では、まず5.2.1でアナログモデルと2値モデルのコスト係数の影響について述べる。本方法の性能は、アナログモデル、2値モデルともコスト係数の値に大きく依存し、都市配置により最適なコスト係数の値が存在することを示す。5.2.2では、最適なコスト係数の値に設定することにより、アナログモデルは、2値モデルに比べ、高い割合で最適解へ収束することを示す。

5.2.1 コスト係数の影響

図2は、エネルギー関数中の制約項の係数 α を一定($\alpha=1$)とし、コスト係数 β の値を変えたときの解が得られる割合とエラーを調べたものである。同図(a)は、アナログモデル($U_0=0.9$)での結果を示し、(b)は、2値モデル($U_0=0$)での結果を示している。図2のエラーは、各コスト係数の値で乱数の種を変えて100回行ったときの最小経路長からの誤差の平均を示している。エラーは、次式で与えられる。

$$\text{エラー} = (\text{経路長} - \text{最小経路長}) / \text{最小経路長} \quad (6)$$

図2より、アナログモデル、2値モデルとも修復アルゴリズムなしの場合、コスト係数 β の値により解が得られる割合とエラーが大きく変化することがわかる。また、いずれの都市配置でも、コスト係数 β の値が大きくなり、なおかつ解が得られる割合が高いところでエラーが良くなることがわかる。このことから、アナログモデル、2値モデルとも最適なコスト係数の値は、制約条件を満足する最大のコスト係数に設定すればよいことがわかる。以上は、修復アルゴリズムなしの場合であるが、次に、修復アルゴリズムありの場合について述べる。

図2より、アナログモデル、2値モデルとも修復アルゴリズムありの場合、エラーが最も小さくなるのは、いずれの都市配置でも、修復アルゴリズムなしの場合のコスト係数 β の値が大きくなり、なおかつ解が得られる割合が高い付近にあることがわかる。例えば、エラーが最も小さくなる最適なコスト係数の値は、アナログモデルでは、マップAは、1.30~1.32、マップBでは0.66、マップCでは0.40になる。2値モデルでは、マップAはアナログモデルと同一の値であり、マップBでは0.86、マップCでは0.50になる。

表1 エラーの比較
Table 1 Comparison of error.

	MAP A	MAP B	MAP C
Analog neuron model (%)	0.0	1.47	4.07
Binary neuron model (%)	0.0	2.15	1.92

このような最適なコスト係数の値に設定したときの、アナログモデルと2値モデルのエラーの比較を表1に示す。表1より、エラーは2値モデルからアナログモデルに拡張しても、都市配置により改善される場合と逆に悪くなる場合があることがわかる。

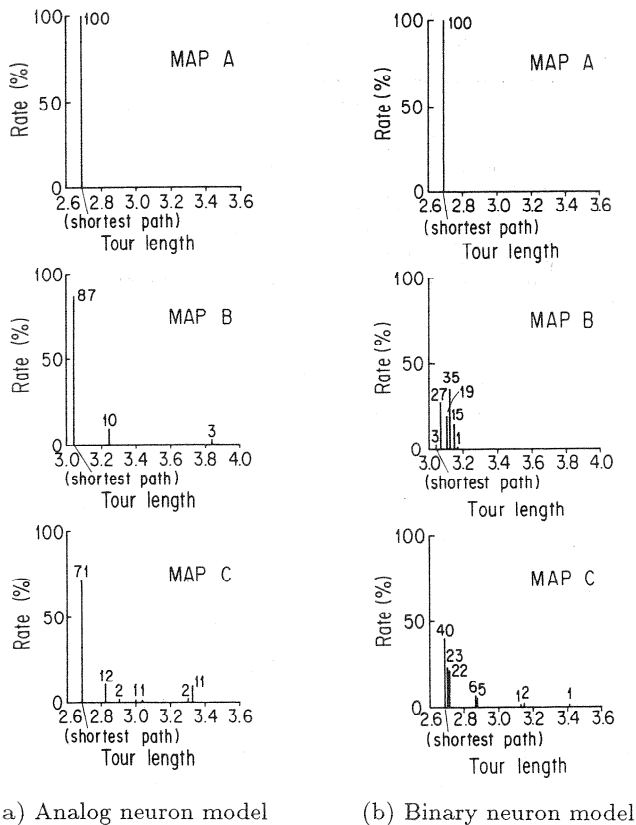
なお、ここでは、アナログモデル、2値モデルとも最適なコスト係数に設定した場合のエラーの比較を行ったが、本方法の性能を引き出すためには、最適なコスト係数の設定法を開発する必要がある。我々は最適なコスト係数の設定法として、制約条件を段階的に変えていき、その制約条件下でコスト係数の値が最大値をとるように制御する方法を提案している⁽⁴⁾。

次に、修復アルゴリズムありとなしの場合のエラーの比較について述べる。一般にホップフィールドネットワークでは、収束しても解が得られるとは限らない。そのため性能を比較する場合、解が得られたもののみについてエラーを比較しても意味がない。そこで、修復アルゴリズムを導入したわけである。図2において、アナログモデル、2値モデルとも修復アルゴリズムありの場合の方が、なしの場合よりもエラーが大きくなる傾向がある。この原因は、次のように考えられる。修復アルゴリズムでは、解を得るために制約充足を強くし、すなわち、コスト係数 β の値を制約項の係数 α よりも十分小さな値($\beta=0.1$)に設定しているためにエラーが大きくなったものと考えられる。

5.2.2 巡回経路の分布

解の質を調べるために、図3(a)と(b)に5.2.1で述べた修復アルゴリズムありの場合のエラーが最も小さくなる最適なコスト係数の値に設定したときのアナログモデルと2値モデルの巡回経路の分布をそれぞれ示す。

図3より、アナログモデルは、いずれの都市配置でも高い割合で最適解が得られることがわかる。例えば、マップAについては、2値モデルと同様にすべて最適解へ収束し、マップBについては、2値モデルでは3%



(a) Analog neuron model (b) Binary neuron model

図3 巡回経路の分布

Fig. 3 The analysis of the solution quality.

しか最適解が得られないのに対して、アナログモデルでは87%が最適解へ収束する。マップCについては、エラーが2値モデルよりも悪いにもかかわらず、71%と高い割合で最適解へ収束する。これらの結果から、2値モデルからアナログモデルに拡張することにより、最適解へ収束する割合が大幅に改善されることがわかる。

6. むすび

本論文では、組合せ最適化問題を効率良く解くため

に、エネルギー減少量が最大となるニューロンのみを選択的に状態変化させるアナログニューラルネットを提案した。本方法の性能を評価するために、10都市、3種類の都市配置のTSPへ適用し、以下のような知見が得られた。

(1) 本方法の解の質は、アナログモデル、2値モデルともエネルギー関数中の制約項の係数を一定とすると、コスト係数の値に大きく依存し、都市配置により最適なコスト係数の値が存在することが判明した。また、アナログモデル、2値モデルとも最適なコスト係数の値は、制約条件を満足するような最大のコスト係数に設定すればよいことがわかった。

(2) 最適なコスト係数に設定したときのエラーは、2値モデルからアナログモデルに拡張しても都市配置により改善される場合と逆に悪くなる場合がある。しかし、アナログモデルでは、いずれの都市配置でも高い割合(71%以上)で最適解へ収束できた。

今後の検討課題は、都市数が増加したときの本方法の性能評価を行うことである。

文 献

- (1) 田中敏雄, 樋口哲也, 古谷立美: “ホップフィールド型ニューラルネットによる最適化問題の効率的な解法”, 信学論(D-II), **J77-D-II**, 6, pp. 1157-1165 (1994-06).
- (2) Hopfield J. J. and Tank D. W.: “Neural computation of decisions in optimization problems”, *Biol. Cybern.* **52**, pp. 141-152 (1985).
- (3) 秋山 泰: “ホップフィールド型ニューラルネットにおけるエネルギー最小状態への収束性を向上させる3つの技法”, 信学技報, **NC90-40** (1990).
- (4) 田中敏雄, 樋口哲也, 古谷立美: “ホップフィールド型ニューラルネットのコスト係数の制御”, 信学論(D-II), **J78-D-II**, 1, pp. 158-168 (1995-01).

(平成6年9月20日受付, 12月20日再受付)