

非負値生産関数を持つ資源配分モデルの解析

新田 徹 古谷立美
電子技術総合研究所

受理 1990 年 9 月 17 日: 再受理 1991 年 4 月 4 日

和文概要 本稿では, 確率的資源配分モデルを扱う. 生産関数は, [7] における生産関数 $g(x) = x$ を拡張したものである. 資源を消費と生産に対して逐次配分することにより, 各段階において効用が得られる. 問題となるのは, 全段階に渡って得られる効用の総和の期待値, すなわち, 期待全効用を最大にするような配分方法である. 最適配分が存在した場合に, それが満たすべき必要十分条件が martingale で表現される. 任意に配分を行った場合に得られる条件付期待全効用の上限は supermartingale を形成するが, その配分が最適であるためには, 条件付期待全効用の上限が martingale であることで必要十分である. 更に, 得られた上記の十分条件を利用することにより, 対数効用関数と非線形生産関数 $g(x) = x^p (p > 0)$ を持つモデルにおける最適配分を求めた. その結果は [7] で得られている最適配分を包含した形のものとなっている.

1. はじめに

本論文では, 資源配分モデルにおける最適配分であるための必要十分条件を示す. 扱うモデルは, [7] における生産関数 $g(x) = x$ を非負値関数へ拡張したものである. 手にしている資源を逐次的に消費と生産に配分してゆくことにより, 各段階において効用が得られる. 問題となるのは, 全段階に渡って得られる効用の総和の期待値を最大にするような配分方法である. 本論文ではマルコフ性および定常性は仮定しない. 最後に, 最適配分であるための十分条件を応用することにより, 生産関数が非線形かつ単調増加であるようなモデルの最適配分政策を構成する.

[7] は Beckmann [1], Dynkin and Yushkevich [2], Folds [3], Kennedy [4] の研究を受けた形のものであり, あるクラスに属する効用関数を持つモデルにおける最適配分であるための十分条件を, 動的計画法の考え方と martingale を利用して導き, それをいくつかのモデルに応用している.

本稿では, [7] における生産関数を拡張したモデルに対して同様に最適配分が存在するという仮定のもとで最適配分であるための十分条件を示し, 更に, 最適配分の必要条件を導く. 必要十分条件は martingale で表現される. Rieder [8] は, 一般的な最適制御システムに対して, 最適政策が満たすべき必要十分条件を martingale で表現した. 特に, 資源配分モデルにおける最適配分であるための必要十分条件を martingale で表現したものの 1 つに Folds [3] がある. Folds [3] の扱ったモデルにおける効用関数および生産関数は, 単調増加かつ上に凸な関数であった.

2 節では, 資源配分モデルの説明を行う. 最適配分であるための十分条件は, 3 節において示される. 必要条件については, 4 節で導き, その際必要となる命題を附録にて導出する. 5 節では, 非線形かつ単調増加な生産関数を持つモデルにおける最適配分を得られた十分条件を用いることにより求める. 最後に, 6 節において結論を述べる.

2. 資源配分モデル

本節ではモデルについて説明する. 本論文で扱う資源配分モデルは, [7]におけるモデルの生産関数を拡張したものである. [7]における生産関数は $g(x) = x$ であったが, それを非負値関数に拡張する.

時刻0において資源が $X_0 \equiv 1$ あるとする. この資源を時刻1に向けて生産に対して $A_1 X_0$, 消費に対して $(1 - A_1) X_0$ と配分したとする. ここで, A_1 は持っている資源量に対する生産に配分する資源量の割合であり, 0以上1以下の値を取るものである. その際, 時刻1における資源 X_1 として, $R_1 g(A_1 X_0)$ が生じるものとする. ここで, R_1 は時刻1における生産に対するランダムパラメータである. g は生産関数であり, 生産に対して配分された資源量 $A_1 X_0$ の関数である. 一方, $U_1 f((1 - A_1) X_0)$ が時刻1における効用として得られるものとする. ここで, U_1 は時刻1における効用に対するランダムパラメータである. f は効用関数であり, 消費に配分された資源量 $(1 - A_1) X_0$ の関数である. 以下, 同様にしてふるまう. つまり, 時刻1における資源 X_1 を生産, 消費に対して, それぞれ, $A_2 X_1, (1 - A_2) X_1$ と配分し, それらに応じて時刻2における資源 $X_2 = R_2 g(A_2 X_1)$, 効用 $U_2 f((1 - A_2) X_1)$ が発生する, 等々である. このように, 取り扱うモデルは離散時間無限段階の確率的システムである.

以下, 上記モデルを数学的に記述する. 確率空間 (Ω, F, P) 上で議論することにする. $X = \{X_n; n \geq 0\}$ は, 非負値確率変数列であり, $X_0 \equiv 1$ とする. X_n は時刻 n における資源量を表わす. $U = \{U_n; n \geq 1\}$ および $R = \{R_n; n \geq 0\}$ を非負値確率変数列とし, 便宜上 $R_0 \equiv 1$ とする. U_n は時刻 n において得られる効用に対するランダムパラメータを表わしており, 割引き因子を一般化したものである. R_n は時刻 n において生じる資源に対するランダムパラメータを表わしている. U および R は, この種のモデルでよく仮定される独立性を前提としていない. $f: [0, +\infty) \rightarrow [-\infty, +\infty)$ を効用関数とする. $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ を生産関数とする. $\{F_n; n \geq 0\}$ は, 任意の $n \geq 0$ に対して $F_n \subset F_{n+1}$ を満たす F の部分 σ 集合体の族とする. 直観的には, F_n は時刻 n において利用できる情報 $\{X_0, U_1, R_1, \dots, U_n, R_n\}$ を表わしており, 我々の取る政策には依存していないものである. 任意の $n \geq 1$ に対して, U_n および R_n は明らかに F_n -可測である. $A = \{A_n; n \geq 0\}$ は, 任意の $n \geq 0$ に対して, $0 \leq A_n \leq 1$ であり, かつ, A_n は F_{n-1} -可測であるような確率変数列とし, 便宜上 $A_0 \equiv 1$ とする. また, D を A の集合とする. A_n は, 時刻 $n - 1$ において持っている資源量に対する生産に配分する資源量の比率を表わしている. 消費に割り当てる資源量の比率は, 明らかに, $1 - A_n$ である. A と X の間には次の関係がある.

$$(2.1) \quad X_n = R_n g(A_n X_{n-1}) \quad (n \geq 1).$$

また, 時刻 n に向けて配分される資源量は, 生産に対しては $A_n X_{n-1}$, 消費に対しては $(1 - A_n) X_{n-1}$ と表わされる. (2.1) からわかるように, 生産関数 g は再帰的に現われる. この複雑さを避けるために, 次の記法を定義しておく.

$$(2.2) \quad \begin{aligned} g_n(A_0, \dots, A_n) &= g(A_n R_{n-1} g_{n-1}(A_0, \dots, A_{n-1})) \quad (n \geq 1), \\ g_0(A_0) &= 1. \end{aligned}$$

このとき,

$$(2.3) \quad X_n = R_n g_n(A_0, \dots, A_n) \quad (n \geq 0)$$

と書ける.

全段階に渡って得られる効用の総和の期待値、つまり、期待全効用の上限を有限とするために、

$$(2.4) \quad \sup_{A \in D} E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r)R_{r-1}g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1}))\right] < +\infty$$

と仮定する。ここで、 $(1 - A_r)R_{r-1}g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1})$ は時刻 r に対して消費に配分される資源量を表わしている。

問題は期待全効用を最大にする配分方法を決定することである。つまり、

$$(2.5) \quad E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r)R_{r-1}g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1}))\right]$$

を最大せしめる $A \in D$ を求めることである。

(2.6) を満たす $\bar{A} \in D$ を最適配分と定義する。

$$(2.6) \quad \begin{aligned} & \sup_{A \in D} E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r)R_{r-1}g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1}))\right] \\ & = E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - \bar{A}_r)R_{r-1}g_{r-1}(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_{r-1}))\right]. \end{aligned}$$

$D^* \subset D$ を次のように定義する。

$$(2.7) \quad D^* = \{A \in D \mid E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r)R_{r-1}g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1}))\right] > -\infty\}.$$

最適配分が存在するとすれば、明らかに、 D^* の中に存在する。最適配分を議論するのであるから、議論の対象は D^* に制限する。

3. 最適配分であるための十分条件

本節では、新田 [7] の結果と同様な結果を示す。すなわち、動的計画法の方程式を確立し、supermartingale 性を示すことによってモデルの特徴を明確にし、最後に最適配分であるための十分条件を martingale で表現する。その証明は [7] の論理がそのまま適用できる。

[定義 3.1]

任意の $n \geq 0$ と任意の $\bar{A} = \{\bar{A}_r; r \geq 0\} \in D^*$ に対して、

$$(3.1) \quad \begin{aligned} & W_n(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n) \\ & = \operatorname{ess\,sup}_{\substack{A \in D^* \\ A_k = \bar{A}_k (0 \leq k \leq n)}} E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r)R_{r-1}g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1})) \mid F_n\right] \end{aligned}$$

と定義する。

[注意]

- (1) $\operatorname{ess\,sup}$ については、[5, p.121] を参照されたい。
- (2) $W_n(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n)$ は、時刻 n までは $\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n$ という比率で配分を行ったときに得られる条件付期待全効用の上限を表わしている。

定理 3.1 は動的計画法の方程式が成り立つことを示す.

[定理 3.1]

任意の $n \geq 0$ と任意の $\bar{A} = \{\bar{A}_r; r \geq 0\} \in D^*$ に対して,

$$(3.2) \quad W_n(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n) = \operatorname{ess\,sup}_{A_{n+1}} E[W_{n+1}(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n, A_{n+1}) \mid F_n]$$

が成り立つ.

定理 3.2 はモデルの 1 つの特徴を表わすものである.

[定理 3.2]

任意の $\bar{A} \in D^*$ に対して, $\{W_n(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n); n \geq 0\}$ は $\{F_n; n \geq 0\}$ に関する supermartingale である. つまり, 任意の $n \geq 0$ に対して, (1) $W_n(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n)$ は F_n -可測, (2) $E[W_n(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n)^-] > -\infty$ 但し, $x^- \equiv \min(x, 0)$, (3) $E[W_{n+1}(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n, \bar{A}_{n+1}) \mid F_n] \leq W_n(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n)$.

定理 3.3 は最適配分であるための十分条件を与える. その証明は [7] と同様にして行うことができるので省略する.

[定理 3.3]

次の 3 つの条件 (i)–(iii) が成り立つとする.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を満たすある数列 $\{a_n; n \geq 0\}$ が存在して, 任意の $n \geq 0$ に対して,

$$(3.3) \quad \sup_{A \in D^*} E\left[\sum_{r=n+1}^{\infty} U_r f((1 - A_r)R_{r-1}g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1}))\right] \leq a_n.$$

(ii) $\{W_n(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n); n \geq 0\}$ は $\{F_n; n \geq 0\}$ に関する martingale である. すなわち, 任意の $n \geq 0$ に対して, (1) $W_n(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n)$ は F_n -可測, (2) $E|W_n(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n)| < +\infty$, (3) $E[W_{n+1}(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n, \bar{A}_{n+1}) \mid F_n] = W_n(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_n)$.

(iii) \bar{A} は,

$$(3.4) \quad \sum_{r=1}^{\infty} E|U_r f((1 - \bar{A}_r)R_{r-1}g_{r-1}(\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_{r-1}))| < +\infty$$

を満たす.

このとき, \bar{A} は最適配分である.

[注意]

(1) (3.5) が成り立つならば, 定理 3.3 の仮定 (i) は満たされる.

$$(3.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in D^*} E\left[\sum_{r=n+1}^{\infty} U_r f((1 - A_r)R_{r-1}g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1}))\right] = 0.$$

- (2) 任意の $x \geq 0$ に対して, $f(x) \leq K(1+x)$ を満たす定数 $K < \infty$ が存在し, 任意の $x \geq 0$ に対して, $g(x) \leq M(1+x)$ を満たす定数 $M < \infty$ が存在し, かつ,

$$(3.6) \quad E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r \left[1 + \sum_{k=1}^{r-1} \left(\prod_{i=r-k}^{r-1} R_i\right) M^k\right] + \left(\prod_{i=1}^{r-1} R_i\right) M^{r-1}\right]\right] < +\infty$$

であるならば, 定理 3.3 の仮定 (i) は満たされる.

- (3) $f \geq 0$ ならば, (3.4) は常に成り立つ.

4. 最適配分の必要条件

本節では, 2 節において説明した資源配分モデルにおける最適配分の必要条件を示す. 必要条件は定理 3.3 の十分条件と同様に martingale で表現される.

次の補題 4.1 は自明である.

[補題 4.1]

$A^* = \{A_n^*; n \geq 0\} \in D^*$ が最適配分ならば, 任意の $n \geq 0$ に対して,

$$(4.1) \quad \begin{aligned} & \sup_{\substack{A \in D^* \\ A_k = A_k^* (0 \leq k \leq n)}} E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f\left((1 - A_r) R_{r-1} g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1})\right)\right] \\ &= E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f\left((1 - A_r^*) R_{r-1} g_{r-1}(A_0^*, \dots, A_{r-1}^*)\right)\right] \end{aligned}$$

が成り立つ.

補題 4.2 は, Striebel [9] のやり方を使って証明される. [9] においては効用関数が非負であるため, 測度を使っているが, 本稿では効用関数が負値も取り得るので, σ 加法的集合関数を使う.

[補題 4.2]

任意の $n \geq 0$ と任意の $A^* \in D^*$ に対して,

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & \sup_{\substack{A \in D^* \\ A_k = A_k^* (0 \leq k \leq n)}} E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f\left((1 - A_r) R_{r-1} g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1})\right)\right] \\ &= E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f\left((1 - A_r^*) R_{r-1} g_{r-1}(A_0^*, \dots, A_{r-1}^*)\right)\right] \end{aligned}$$

が成り立つことと,

$$(4.3) \quad \begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{\substack{A \in D^* \\ A_k = A_k^* (0 \leq k \leq n)}} E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f\left((1 - A_r) R_{r-1} g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1})\right) \mid F_n\right] \\ &= E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f\left((1 - A_r^*) R_{r-1} g_{r-1}(A_0^*, \dots, A_{r-1}^*)\right) \mid F_n\right] \quad a.s.P \end{aligned}$$

が成り立つこととは同値である.

(証明)

$n \geq 0$ を任意に固定し, 補題 A.6 を適用する. そのためには, 定義 A.2 における関数族 $\{f_r; r \in C\}$ に相当するものを明確にし, それが定義 A.2 における仮定を満たしていることを確認すれば良い. 可測関数族

$$(4.4) \quad \left\{ E \left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r) R_{r-1} g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1})) \mid F_n \right]; \quad A \in D^*, A_k = A_k^* (0 \leq k \leq n) \right\}$$

が定義 A.2 における関数族 $\{f_r; r \in C\}$ に相当する. (4.4) の要素が可積分であることは, (2.4) と (2.7) から明らかである. また, (4.4) は directed upwords (定義 A.1) である (自明). 最後に, (2.4) から,

$$(4.5) \quad \sup_{\substack{A \in D^* \\ A_k = A_k^* (0 \leq k \leq n)}} \int_{\Omega} E \left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r) R_{r-1} g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1})) \mid F_n \right] dP < +\infty.$$

(証明終わり)

定理 4.1 は最適配分の必要条件を示す.

[定理 4.1]

$A^* = \{A_n^*; n \geq 0\}$ が最適配分であるならば, $\{W_n(A_0^*, \dots, A_n^*); n \geq 0\}$ は $\{F_n; n \geq 0\}$ に関する martingale である. つまり, 任意の $n \geq 0$ に対して, (1) $W_n(A_0^*, \dots, A_n^*)$ は F_n -可測, (2) $E|W_n(A_0^*, \dots, A_n^*)| < +\infty$, (3) $E[W_{n+1}(A_0^*, \dots, A_n^*, A_{n+1}^*) \mid F_n] = W_n(A_0^*, \dots, A_n^*)$.

(証明)

(1) および (2) は自明. $A^* \in D^*$ は最適配分であるから, 補題 4.1 により, 任意の $n \geq 0$ に対して,

$$(4.6) \quad \sup_{\substack{A^* \in D^* \\ A_k = A_k^* (0 \leq k \leq n)}} E \left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r) R_{r-1} g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1})) \right] \\ = E \left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r^*) R_{r-1} g_{r-1}(A_0^*, \dots, A_{r-1}^*)) \right].$$

故に, 補題 4.2 により, 任意の $n \geq 0$ に対して,

$$(4.7) \quad \text{ess sup}_{\substack{A \in D^* \\ A_k = A_k^* (0 \leq k \leq n)}} E \left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r) R_{r-1} g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1})) \mid F_n \right] \\ = E \left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r^*) R_{r-1} g_{r-1}(A_0^*, \dots, A_{r-1}^*)) \mid F_n \right] \quad a.s.P.$$

以下, $n_0 \geq 0$ を任意に固定する. n_0 に対する (4.7) の左辺は, 定義 3.1 により, $W_{n_0}(A_0^*, \dots,$

$A_{n_0}^*$) に等しい. 一方, 右辺は次の通りである.

$$\begin{aligned}
 (4.8) & E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r^*)R_{r-1}g_{r-1}(A_0^*, \dots, A_{r-1}^*)) \mid F_{n_0}\right] \\
 &= E\left[E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r^*)R_{r-1}g_{r-1}(A_0^*, \dots, A_{r-1}^*)) \mid F_{n_0+1}\right] \mid F_{n_0}\right] \\
 &= E\left[\operatorname{ess\,sup}_{\substack{A \in D^* \\ A_k = A_k^* (0 \leq k \leq n_0+1)}} E\left[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f((1 - A_r)R_{r-1}g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1})) \mid F_{n_0+1}\right] \mid F_{n_0}\right] \\
 & \hspace{15em} (n_0 + 1 \text{ に対する (4.7) による}) \\
 &= E[W_{n_0+1}(A_0^*, \dots, A_{n_0}^*, A_{n_0+1}^*) \mid F_{n_0}]. \hspace{10em} (\text{定義 3.1 による}) \\
 & \hspace{25em} (\text{証明終わり})
 \end{aligned}$$

5. 非線形単調増加生産関数モデルへの応用

本節では, 3 節において示した最適配分であるための十分条件を, 非線形かつ単調増加な生産関数を持つ資源配分モデルに応用することにより, その最適配分政策を構成する.

(1) 任意の $n \geq 0$ に対して, $U_n > 0, R_n > 0$ a.s.P, (2) 効用関数は, $f(y) = \log_e y (y > 0), f(y) = -\infty (y = 0)$, (3) 生産関数は, $g(y) = y^p (p > 0)$ とする. 2 節で述べたモデルとの違いはこの 3 点だけである. 生産関数 g は, $0 < p < 1$ のとき上に凸であり, $1 < p$ のとき下に凸な関数であり, いずれにしても非線形かつ単調増加な関数である. (2.2) で定義された g_n は本節では次のようになる.

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad g_n(A_0, \dots, A_n) &= \left(\prod_{k=0}^n A_k^{p^{n-k+1}}\right) \cdot \left(\prod_{k=0}^{n-1} R_k^{p^{n-k}}\right), \\
 g_0(A_0) &= 1.
 \end{aligned}$$

また,

$$(5.2) \quad \sum_{r=1}^{\infty} E\left[U_r \sum_{k=0}^{r-1} p^{r-k-1} |\log R_k|\right] < +\infty$$

と仮定する. この仮定により, 期待全効用の上限は有限であることが保証される. 更に,

$$\begin{aligned}
 (5.3) \quad & \sum_{r=1}^{\infty} E\left[U_r \left| \log \left\{ \frac{E[p^r U_r \mid F_{r-1}]}{E\left[\sum_{k=r}^{\infty} p^k U_k \mid F_{r-1}\right]}\right\} \right|\right] < +\infty, \\
 & \sum_{r=1}^{\infty} E\left[U_r \sum_{k=1}^{r-1} p^{r-k} \left| \log \left\{ \frac{E\left[\sum_{i=k+1}^{\infty} p^i U_i \mid F_{k-1}\right]}{E\left[\sum_{i=k}^{\infty} p^i U_i \mid F_{k-1}\right]}\right\} \right|\right] < +\infty
 \end{aligned}$$

と仮定する. (5.3) は, たとえば, 常数 $0 < \alpha < 1$ に対して, $\alpha^n \leq U_n \leq \alpha^{n-1}$ a.s.P ($n \geq 0$) であり, かつ $0 < p < 1$ のときに成り立つ.

D を次のように分割する.

$$\begin{aligned}
 (5.4) \quad D^0 &= \{A \in D \mid \text{任意の } n \geq 1 \text{ に対して, } 0 < A_n < 1 \text{ a.s.P}\}, \\
 D^1 &= \{A \in D \mid \text{ある } n \geq 1 \text{ に対して, } P(A_n = 0 \text{ または } A_n = 1) > 0\}.
 \end{aligned}$$

明らかに $D^0 \cap D^1 = \phi$ である. このとき, (2.7) で定義した D^* は次のようになる.

$$(5.5) \quad D^* = \{A \in D^0 \mid E[\sum_{r=1}^{\infty} U_r f\{(1 - A_r)R_{r-1}g_{r-1}(A_0, \dots, A_{r-1})\}] > -\infty\}.$$

次の定理 5.1 において, 最適配分を与える.

[定理 5.1]

$$(5.6) \quad \begin{aligned} A_0^* &= 1, \\ A_{n+1}^* &= E[\sum_{r=n+2}^{\infty} p^r U_r \mid F_n] / E[\sum_{r=n+1}^{\infty} p^r U_r \mid F_n] \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

と定義すると, $A^* \in D^*$ は最適配分であり, 最適値は,

$$(5.7) \quad \begin{aligned} &E[\sum_{r=1}^{\infty} U_r \log\{E[p^r U_r \mid F_{r-1}] / E[\sum_{k=r}^{\infty} p^k U_k \mid F_{r-1}]\}] \\ &+ E[\sum_{r=1}^{\infty} U_r \sum_{k=1}^{r-1} p^{r-k} \log\{E[\sum_{i=k+1}^{\infty} p^i U_i \mid F_{k-1}] / E[\sum_{i=k}^{\infty} p^i U_i \mid F_{k-1}]\}] \\ &+ E[\sum_{r=1}^{\infty} U_r \sum_{k=0}^{r-1} p^{r-k-1} \log R_k] \end{aligned}$$

である.

(証明)

定理 3.3 を使って A^* が最適配分であることを示す. まず, $A^* \in D^*$ であり, 定理 3.3 の条件 (i) および (iii) が満たされていることは, (5.2) および (5.3) から明らかである. そこで, 残る条件 (ii) の確認を行う. つまり, $\{W_n(A_0^*, \dots, A_n^*); n \geq 0\}$ が $\{F_n; n \geq 0\}$ に関する martingale であることを示す.

① 任意の $n \geq 0$ に対して, $W_n(A_0^*, \dots, A_n^*)$ は F_n -可測である (自明). ② (5.2) および (5.3) により, 任意の $n \geq 0$ に対して, $E|W_n(A_0^*, \dots, A_n^*)| < +\infty$. ③ 次に, 任意の $n \geq 0$ に対して, $W_n(A_0^*, \dots, A_n^*) = E[W_{n+1}(A_0^*, \dots, A_n^*, A_{n+1}^*) \mid F_n]$ が成り立つことを示す. 任意の $n \geq 0$ に対して,

$$(5.8) \quad \begin{aligned} &W_n(A_0^*, \dots, A_n^*) \\ &= \text{ess sup}_{A_{n+1}} E[W_{n+1}(A_0^*, \dots, A_n^*, A_{n+1}) \mid F_n] \quad (\text{定理 3.1 による}) \\ &\leq \sum_{r=1}^n U_r \log\{(1 - A_r^*)R_{r-1}g_{r-1}(A_0^*, \dots, A_{r-1}^*)\} \\ &\quad + E[\sum_{r=n+1}^{\infty} p^r U_r \mid F_n] (\sum_{k=0}^n \{\log A_k^*\} / p^k) \\ &\quad + p^n \cdot E[U_{n+1} \mid F_n] (\sum_{k=0}^n \{\log R_k\} / p^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + E[\operatorname{ess\,sup}_{\substack{A' \in D^* \\ A'_k = A_k (0 \leq k \leq n+1)}} \{ E[\sum_{r=n+3}^{\infty} p^r U_r (\sum_{k=n+2}^{r-1} \{ \log A'_k \} / p^k) \mid F_{n+1}] \\
 & + E[\sum_{r=n+2}^{\infty} U_r \log \{ (1 - A'_r) R_{r-1} (\prod_{k=0}^{r-2} R_k^{p^{r-k-1}}) \} \mid F_{n+1}] \mid F_n] \\
 & + (1/p^{n+1}) E[\sum_{r=n+2}^{\infty} p^r U_r \mid F_n] \log \{ E[\sum_{r=n+2}^{\infty} p^r U_r \mid F_n] / E[\sum_{r=n+1}^{\infty} p^r U_r \mid F_n] \} \\
 & + E[U_{n+1} \mid F_n] \log \{ 1 - (E[\sum_{r=n+2}^{\infty} p^r U_r \mid F_n] / E[\sum_{r=n+1}^{\infty} p^r U_r \mid F_n]) \} \\
 & = E[W_{n+1}(A_0^*, \dots, A_n^*, A_{n+1}^*) \mid F_n].
 \end{aligned}$$

(5.8) における不等式は、 $T(x) = a \cdot \log x + b \cdot \log(1 - x)$ ($0 < x < 1$; $a, b > 0$) とおくと、 $\max_{0 < x < 1} T(x) = T(a/(a+b))$ であることによる。一方、定理 3.2 により、任意の $A \in D^*$ に対して、 $\{W_n(A_0, \dots, A_n); n \geq 0\}$ は、 $\{F_n; n \geq 0\}$ に関する supermartingale であるので、任意の $n \geq 0$ に対して、

$$(5.9) \quad W_n(A_0^*, \dots, A_n^*) \geq E[W_{n+1}(A_0^*, \dots, A_n^*, A_{n+1}^*) \mid F_n]$$

が成り立つ。よって、(5.8) および (5.9) により、任意の $n \geq 0$ に対して、

$$(5.10) \quad W_n(A_0^*, \dots, A_n^*) = E[W_{n+1}(A_0^*, \dots, A_n^*, A_{n+1}^*) \mid F_n]$$

である。故に、 $\{W_n(A_0^*, \dots, A_n^*); n \geq 0\}$ は $\{F_n; n \geq 0\}$ に関する martingale である。従って、定理 3.3 により、 A^* は最適配分である。

(証明終わり)

次の系 5.1 では、最適配分が明示的に求められる。

[系 5.1]

任意の $n \geq 1$ に対して $U_n = \beta^{n-1}$ (ただし、 β は $0 < \beta < 1$ を満たす常数)、 $0 < p < 1$ 、 $\{R_n; n \geq 0\}$ は i.i.d. とする。このとき、最適配分は、

$$(5.11) \quad \begin{aligned} A_0^* &= 1, \\ A_{n+1}^* &= p\beta \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

であり、最適値は

$$(5.12) \quad \{(1 - p\beta)(\log(1 - p\beta)) + p\beta(\log(p\beta)) + E[\log R_1]\} / (1 - \beta)(1 - p\beta)$$

である。

[7] は、系 5.1 のモデルにおける生産関数が $g(x) = x^1$ (つまり、 $p = 1$) である場合について、その解として $A_{n+1}^* = \beta$ ($n \geq 0$) を与えている。系 5.1 の解はそれを包含した形のものとなっていることがわかる。

6. 結論

非負値生産関数を持つ資源配分モデルにおける最適配分であるための必要十分条件を導出した. 任意に配分を行った場合に得られる条件付期待全効用の上限は, supermartingale を形成するが, その配分が最適であるためには条件付期待全効用の上限が martingale であることで十分であり, かつ, martingale であることが必要である. 更に, 得られた十分条件を適用することにより, 生産関数が非線形であり, かつ, 単調増加であるような資源配分モデルにおける最適配分を求めた. その最適配分は効用に対するランダムパラメータおよび生産関数の形に依存したものとなる.

謝辞

研究の機会を与えて下さった情報アーキテクチャ部棟上部長 (現情報処理振興事業協会理事), 討論に参加いただいた計算機構研究室の皆様, 有益なコメントを下さった審査委員の方々に感謝致します.

参考文献

- [1] Beckmann, M.J.: Resource Allocation over Time. Some Dynamic Programming Models. *Mathematical Models in Economics* (ed. J. Los and M.W. Los). North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1974, 171–178.
- [2] Dynkin, E.B. and Yushkevich, A.A.: *Controlled Markov Processes*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [3] Foldes, L.: Martingale Conditions for Optimal Saving-Discrete Time. *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 5, North-Holland Publishing Company, 1978, 83–96.
- [4] Kennedy, D.P.: Stimulating Prices In a Stochastic Model of Resource Allocation. *Mathematics of Operations Research*, Vol. 8, No. 1, 1983.
- [5] Neveu, J.: *Discrete-Parameter Martingales*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.
- [6] 西尾真喜子: 確率論, 実教出版, 1978.
- [7] Nitta, T.: An Analysis of a Stochastic Resource Allocation Model with Various Utility Functions. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 32, 1989, 1–15.
- [8] Rieder, U.: On Optimal Policies and Martingales in Dynamic Programming. *J. Appl. Prob.*, Vol. 13, 1976, 507–518.
- [9] Striebel, C.: Optimal Control of Discrete Time Stochastic Systems. *Lecture Notes in Economics and Mathematical System*, No. 110, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1975.
- [10] 鶴見茂: 測度と積分, 理工学社, 1965.

附録

この附録では確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) を考える. ここでは, Striebel [9] と同様の議論を展開するが, [9] との違いは, css inf を css sup に取り替えていることと, 非負値可測関数を実数値可測関数へと拡張していることである. [9] においては, 測度を使っているが, ここではその拡張のため, σ 加法的集合関数を使う. 本文から直接参照されるのは補題 A.6 だけである.

まず, 準備のために, いくつかの定義を与える.

[定義 A.1] ([5, p.95] からの引用)

H を確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上の確率変数族とする. このとき, 任意の $X_1, X_2 \in H$ に対して, $X_1 \leq X, X_2 \leq X$ a.s. なる $X \in H$ が存在するとき, H は directed upwards であるという.

[定義 A.2]

$\{f_r; r \in C\}$ を確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上の可積分な可測関数の族とする. 但し, directed upwards (Cf. 定義 A.1) であり, かつ, $\sup_{r \in C} \int_{\Omega} f_r dP < +\infty$ とする. そこで, 任意の $S \in \mathcal{B}$ と任意の $r \in C$ に対して,

$$(A.1) \quad \nu_r(S) = \int_S f_r dP$$

と定義する.

[定義 A.3]

任意の $S \in \mathcal{B}$ に対して,

$$(A.2) \quad \nu(S) = \sup_{\substack{r_1, \dots, r_n \\ s_1, \dots, s_n \\ r_i \in C, s_i \in \mathcal{B} \\ \sum_{i=1}^n S_i = S}} \sum_{i=1}^n \nu_{r_i}(S_i)$$

と定義する.

次の補題 A.1 は, ν と ν_r との関係を示している.

[補題 A.1]

任意の $S \in \mathcal{B}$ に対して,

$$(A.1.1) \quad \nu(S) = \sup_{r \in C} \nu_r(S).$$

(証明)

$\nu(S) \geq \sup_{r \in C} \nu_r(S)$ は明らか. 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$(A.1.2) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \nu_{\bar{r}_i}(\bar{S}_i) + \epsilon &\geq \nu(S), \\ S &= \sum_{i=1}^n \bar{S}_i \end{aligned}$$

を満たす $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_n \in \mathcal{B}; \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n \in C$ をとる. ここで, $\{f_r; r \in C\}$ は directed upwards であるから, ある $r_0 \in C$ が存在して, $f_{r_0} \geq f_{\bar{r}_i}$ a.s. P ($i = 1, \dots, n$). 故に,

$$(A.1.3) \quad \begin{aligned} \sup_{r \in C} \nu_r(S) &\geq \nu_{r_0}(S) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \nu_{\bar{r}_i}(\bar{S}_i) \\ &\geq \nu(S) - \epsilon. \quad ((A.1.2) \text{ による}) \end{aligned}$$

よって, $\epsilon \rightarrow 0$ とすれば, $\sup_{r \in C} \nu_r(S) \geq \nu(S)$.

(証明終わり)

次の補題 A.2 は, σ 加法的集合関数であるための十分条件を示したものであり, 確率論における確率測度であるための十分条件 ([6, p.34]) に対応するものである.

[補題 A.2]

μ を B 上の実数値集合関数とする. このとき,

- (i) 互いに素な任意の $S_1, \dots, S_n \in B$ に対して, $\mu\left(\bigcup_{k=1}^n S_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(S_k)$.
 (ii) $S_k \downarrow \phi$ なる任意の $S_1, S_2, \dots \in B$ に対して, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k) = 0$.

ならば, μ は σ 加法的集合関数である.

(証明) 省略.

補題 A.3, 補題 A.4 では, ν および ν_r が共に P -絶対連続な σ 加法的集合関数であることが述べられる.

[補題 A.3]

ν_r は P -絶対連続な σ 加法的集合関数である.

(証明) 定義 A.2 および補題 A.2 から自明 ([10, p.108]).

(証明終わり)

[補題 A.4]

ν は P -絶対連続な σ 加法的集合関数である.

(証明)

まず, ν が σ 加法的集合関数であることを示す. ν は明らかに実数値関数であるから, 補題 A.2 を使うことができる. ν が補題 A.2(ii) を満たすことは補題 A.1 から明らかである. そこで, 補題 A.2(i) を示す. 互いに素な任意の $S_1, \dots, S_m \in B$ をとり, $S = \sum_{\alpha=1}^m S_\alpha$ とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対して, 各 S_α ($\alpha = 1, \dots, m$) について,

$$(A.4.1) \quad \sum_{i=1}^{n_\alpha} \nu_{r_{\alpha,i}}(S_{r_{\alpha,i}}) + \frac{\epsilon}{m} \geq \nu(S_\alpha),$$

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} S_{r_{\alpha,i}}$$

なる $S_{r_{\alpha,1}}, \dots, S_{r_{\alpha,n_\alpha}} \in B$; $\nu_{r_{\alpha,1}}, \dots, \nu_{r_{\alpha,n_\alpha}}$ s.t. $r_{\alpha,i} \in C$ をとる. このとき,

$$(A.4.2) \quad \nu(S) \geq \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^{n_\alpha} \nu_{r_{\alpha,i}}(S_{r_{\alpha,i}})$$

$$\geq \sum_{\alpha=1}^m \nu(S_\alpha) - \epsilon. \quad ((A.4.1) \text{による})$$

一方,

$$\begin{aligned} (A.4.3) \quad \nu(S) &= \sup_{r \in C} \nu_r(S) \quad (\text{補題A.1による}) \\ &= \sup_{r \in C} \sum_{\alpha=1}^m \nu_r(S_\alpha) \quad (\text{定義A.2による}) \\ &\leq \sum_{\alpha=1}^m \sup_{r \in C} \nu_r(S_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \nu(S_\alpha). \quad (\text{補題A.1による}) \end{aligned}$$

故に, ν は σ 加法的集合関数である. $P(S) = 0$ なる任意の $S \in \mathcal{B}$ をとると, 任意の $r \in C$ に対して,

$$\begin{aligned} (A.4.4) \quad 0 &= \nu_r(S) \quad (\text{補題A.3による}) \\ &\leq \nu(S). \quad (\text{補題A.1による}) \end{aligned}$$

一方, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} (A.4.5) \quad \sum_{i=1}^n \nu_{\bar{r}_i}(\bar{S}_i) + \epsilon &\geq \nu(S), \\ S &= \sum_{i=1}^n \bar{S}_i \end{aligned}$$

なる $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_n \in \mathcal{B}$; $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n \in C$ をとると, ν_r の P -絶対連続性により, $\sum_{i=1}^n \nu_{\bar{r}_i}(\bar{S}_i) = 0$. 従って, $\epsilon \rightarrow 0$ とすれば $\nu(S) \leq 0$. 以上により, $\nu(S) = 0$ となるので, ν は P -絶対連続である. (証明終わり)

次の補題 A.5 では, ν の P に関する Radon-Nykodym の導関数を求める.

[補題 A.5]

$$(A.5.1) \quad d\nu/dP = \text{ess sup}_{r \in C} f_r \quad a.s.P.$$

(証明)

補題 A.4 により, ν は P -絶対連続な σ 加法的集合関数であるから, $\nu(S) = \int_S f dP$ ($S \in \mathcal{B}$) を満たす積分可能な関数 $f = d\nu/dP$ (Radon-Nykodym の導関数) が存在する ([10, p.113]). この f が $\{f_r; r \in C\}$ の ess sup (cf. [5, p.121]) であることを示す.

① ν_r, ν は, それぞれ, 補題 A.3, 補題 A.4 により, P -絶対連続な σ 加法的集合関数であるから, $\nu - \nu_r$ は P -絶対連続な σ 加法的集合関数であり ([10, p.108]), しかも非負であるから, 有限測

度である ([10, p.104]). よって, Radon-Nykodym の定理により, $\nu(S) - \nu_r(S) = \int_S d(\nu - \nu_r)/d_P \cdot d_P$ を満たす可積分な非負関数 $d(\nu - \nu_r)/d_P$ が存在する. よって, 任意の $S \in \mathcal{B}$ に対して,

$$(A.5.2) \quad \begin{aligned} 0 &= \nu(S) - \nu_r(S) - \int_S d(\nu - \nu_r)/d_P \cdot d_P \\ &= \int_S \{f - f_r - d(\nu - \nu_r)/d_P\} d_P. \end{aligned}$$

故に, $f - f_r = d(\nu - \nu_r)/d_P$ a.s.P. $d(\nu - \nu_r)/d_P$ は非負であるから, $f \geq f_r$ a.s.P.

② 任意の $r \in C$ に対して, $g \geq f_r$ a.s.P を満たす可積分な可測関数 g をとる. また, 任意の $S \in \mathcal{B}$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$(A.5.3) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \nu_{\bar{r}_i}(\bar{S}_i) + \epsilon &\geq \nu(S), \\ S &= \sum_{i=1}^n \bar{S}_i \end{aligned}$$

を満たす $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_n \in \mathcal{B}$; $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n \in C$ をとると,

$$(A.5.4) \quad \begin{aligned} \int_S g d_P &\geq \sum_{i=1}^n \nu_{\bar{r}_i}(\bar{S}_i) \\ &\geq \nu(S) - \epsilon. \quad ((A.5.3) \text{による}) \end{aligned}$$

$\epsilon \rightarrow 0$ とすると, 任意の $S \in \mathcal{B}$ に対して,

$$(A.5.5) \quad \int_S g d_P \geq \nu(S).$$

ここで, ν および $\int_S g d_P$ は共に P -絶対連続な σ 加法的集合関数であるから (補題 A.4, [10, p.108]), $\int_S g d_P - \nu(S) \geq 0$ は, P -絶対連続な σ 加法的集合関数であり, 更に, 非負であるから, 有限測度である. よって, Radon-Nykodym の定理により, 任意の $S \in \mathcal{B}$ に対して, $\int_S g d_P - \nu(S) = \int_S h d_P$ を満たす可積分な非負関数 h が存在する. このとき, 任意の $S \in \mathcal{B}$ に対して,

$$(A.5.6) \quad \begin{aligned} 0 &= \int_S g d_P - \nu(S) - \int_S h d_P \\ &= \int_S \{g - f - h\} d_P. \end{aligned}$$

故に, $g - f - h = 0$ a.s.P. $h \geq 0$ a.s.P であるから, $g \geq f$ a.s.P.

g が可積分でない場合は自明.

(証明終わり)

補題 A.6 はこの附録の最終的な目的である.

[補題 A.6]

任意の $r_0 \in C$ に対して,

$$(A.6.1) \quad f_{r_0} = \operatorname{ess\,sup}_{r \in C} f_r \quad a.s.P$$

\Leftrightarrow

$$(A.6.2) \quad \int_{\Omega} f_{r_0} dP = \sup_{r \in C} \int_{\Omega} f_r dP.$$

(証明)

(A.6.1) \Rightarrow (A.6.2) は明らか. (A.6.2) を仮定する. まず, 任意の $S \in \mathcal{B}$ に対して,

$$(A.6.3) \quad \nu_{r_0}(S) = \nu(S)$$

が成り立つことを示す.

$$(A.6.4) \quad \begin{aligned} \nu(\Omega) &= \sup_{r \in C} \nu_r(\Omega) && \text{(補題 A.1 による)} \\ &= \int_{\Omega} f_{r_0} dP && \text{((A.6.2) による)} \\ &= \nu_{r_0}(\Omega). \end{aligned}$$

ここで, 任意の $S \in \mathcal{B}$ に対して,

$$(A.6.5) \quad \begin{aligned} \nu(S) &= \sup_{r \in C} \nu_r(S) && \text{(補題 A.1 による)} \\ &\geq \nu_{r_0}(S). \end{aligned}$$

そこで, $\nu(S') > \nu_{r_0}(S')$ なる $S' \in \mathcal{B}$ が存在すると仮定すると,

$$(A.6.6) \quad \begin{aligned} \nu(\Omega) &= \nu(S') + \nu(S'^c) && \text{(補題 A.4 による)} \\ &> \nu_{r_0}(S') + \nu_{r_0}(S'^c) \\ &= \nu_{r_0}(\Omega) \end{aligned}$$

となり, (A.6.4) に矛盾する. 故に, (A.6.3) が成り立つ. つまり, 任意の $S \in \mathcal{B}$ に対して, $\int_S d\nu/dP \cdot dP = \int_S f_{r_0} dP$. よって, $d\nu/dP = f_{r_0}$ *a.s.P*. 従って, 補題 A.5 により, $f_{r_0} = \operatorname{ess\,sup}_{r \in C} f_r$ *a.s.P*.

(証明終わり)

連絡先: 〒305 つくば市梅園 1-1-4
 通商産業省 工業技術院
 電子技術総合研究所
 情報アーキテクチャ部
 計算機構研究室
 新田 徹

ABSTRACT

**An Analysis of a Stochastic Resource Allocation Model
with a Nonnegative Production Function**

Tohru Nitta Tatsumi Furuya
Electrotechnical Laboratory

In this paper, we deal with a stochastic resource allocation model. Suppose that we have resource X_n at time n , and allocate $A_{n+1}X_n$ out of X_n for production and $(1 - A_{n+1})X_n$ for consumption at time n , where A_{n+1} is the proportion of the resource that is allocated for production at time n . Then utility $U_{n+1}f((1 - A_{n+1})X_n)$ is obtained and resource $X_{n+1} = R_{n+1}g(A_{n+1}X_n)$ is occurred at time $n + 1$, where U_{n+1} and R_{n+1} are random parameters, f is the utility function, and g is the production function that is an extension of $g(x) = x$ in [7]. We are interested in the way of allocation that maximizes the sum of the expected utilities.

We show necessary and sufficient conditions for an allocation to be optimal in this model. The sufficient condition is obtained via the technique of dynamic programming in the same way as one in [7]. Although the necessary condition is shown by means of the similar way used in [9], the sigma additive set function is substituted for the measure as the utility function that we treat in this paper takes more generally a real value. The necessary and sufficient conditions are represented via a martingale: the supremum of the conditional expected utilities forms a supermartingale if we arbitrarily allocate the resource, however it is necessary and sufficient for an allocation to be optimal that the supremum is a martingale.

Further, we have obtained an optimal allocation in the resource allocation model with a logarithmic utility function and a nonlinear production function $g(x) = x^p$ ($p > 0$), utilizing the sufficient condition for an allocation to be optimal obtained above. The optimal allocation includes one obtained in [7].